ORDENAÇÃO

DESCRIÇÃO

Apresentação dos conceitos de ordenação, Comparação dos algoritmos de ordenação segundo óticas distintas, Aplicação das métricas de classificação, Apresentação dos algoritmos de ordenação da bolha, da inserção e da seleção implementados em Linguagem C.

PROPÓSITO

Algoritmos de ordenação de uma sequência de chaves é, sem dúvida, um dos problemas mais estudados em computação. Obter conhecimento sobre os algoritmos de ordenação elementares permitirá que você consiga escolher o método de ordenação mais adequado ao problema a ser solucionado, para que possa desenvolver um algoritmo que seja eficiente e rápido.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Reconhecer os conceitos fundamentais de ordenação para aplicação de métricas de classificação e escolha adequada do método na resolução de problemas

MÓDULO 2

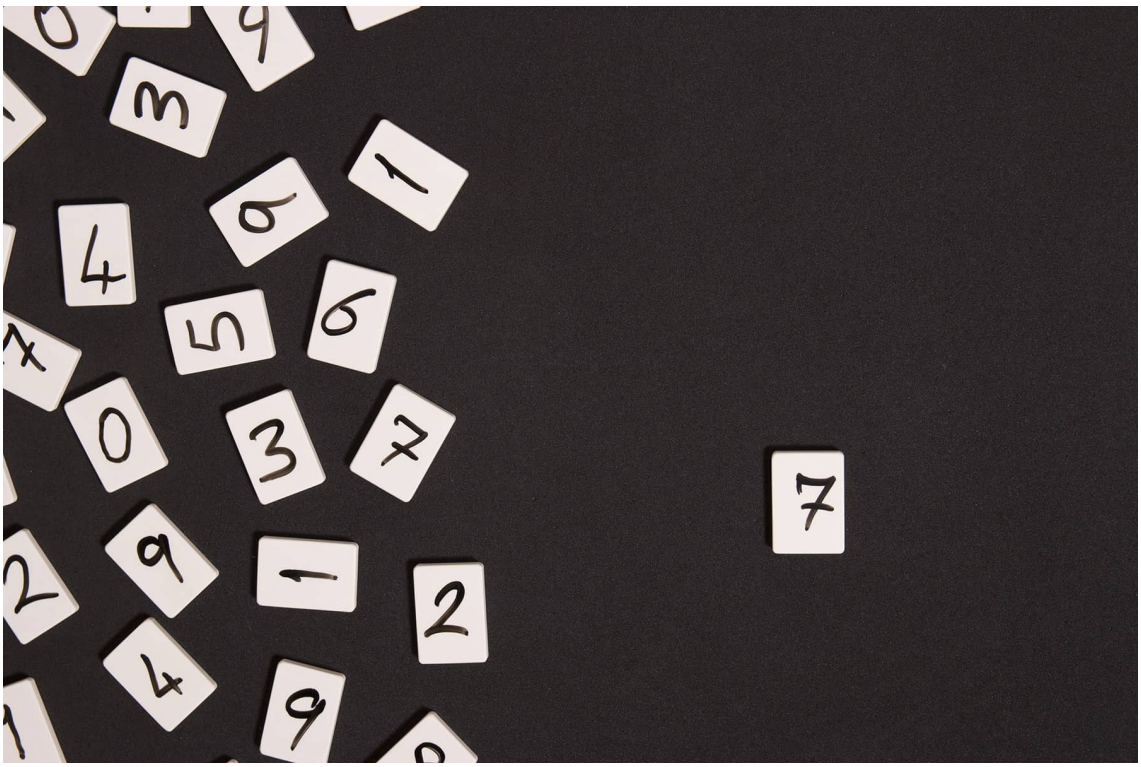
Distinguir os algoritmos de ordenação da bolha, inserção e seleção para desenvolvimento de solução rápida e eficiente para implementação em Linguagem C

MÓDULO 1

⦿ **Reconhecer os conceitos fundamentais de ordenação para aplicação de métricas de classificação e escolha adequada do método na resolução de problemas**

ORDENAÇÃO

O problema da ordenação é, sem dúvida, um dos mais antigos e mais estudados em computação. É a ferramenta para a solução de diversos problemas mais complexos e existem diversos algoritmos que resolvem este problema.



Fonte: Shutterstock.

Informalmente, podemos enunciar o problema como sendo encontrar uma permutação de uma sequência de dados, tal que dois elementos adjacentes desta sequência satisfaçam a uma das relações a seguir:

Menor que	Caso se deseje encontrar a sequência ordenada em ordem crescente.
Maior que	Caso se deseje encontrar a sequência ordenada em ordem decrescente.

Atenção! Para visualização completa da tabela utilize a rolagem horizontal

Uma instância do problema é composta por um conjunto de dados em uma sequência arbitrária de tamanho n e sua solução é a permutação que respeite a relação de ordem desejada.

★ EXEMPLO

Por exemplo, a sequência 12, 35, 17, 92, 45, 8 é uma instância de tamanho n = 6 e a solução desta instância é a permutação 8, 12, 17, 35, 45, 92, se a relação de ordenação for menor que ("<"), ou a permutação 92, 45, 35, 17, 12, 8, se a relação de ordenação for maior que (">").

Podemos simplificar o estudo da ordenação considerando que a relação de ordem a ser respeitada é a **"menor que"**. Ao assumir isto, não há perda de generalidade, uma vez que o estudo para relação **"maior que"** é completamente análogo.

FORMALIZANDO O ENUNCIADO DO PROBLEMA

Seja $S = s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ uma sequência de números inteiros distintos. Ordenar a sequência S é equivalente a encontrar a permutação $S' = s'_1, s'_2, s'_3, ... , s'_n$ tal que $s'_i < s'_{i+1}$ para $0 < i < n$.

Não há perda de generalidade ao enunciar o problema da forma acima referenciando números inteiros, pode-se tratar qualquer objeto de dados da mesma forma, bastando definir a relação

“<” para estes objetos da dados.

★ EXEMPLO

Por exemplo, caso os objetos de dados fossem cadeias de caracteres, poderíamos definir a relação **“<”** como a ordem lexicográfica (“ordem alfabética”), viabilizando o processo de ordenação. Assim, por exemplo, a cadeia **“Andrea” < “Luiz”**.

Definido o problema, pode-se dizer que um algoritmo de ordenação é a entidade que recebe como entrada uma instância do problema de ordenação e fornece como saída uma permutação desta entrada, satisfazendo a relação de ordem definida no enunciado do problema.

CLASSIFICAÇÃO DOS ALGORITMOS DE ORDENAÇÃO

Os algoritmos de ordenação podem ser classificados segundo diversos parâmetros:

- Complexidade computacional.
- Complexidade de espaço.
- Ordenação interna ou externa.
- Caráter recursivo.
- Estabilidade.

Cada uma destas características é importante e será discutida a seguir.

COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

O estudo da complexidade computacional é um pré-requisito para o estudo dos algoritmos de ordenação.

Entretanto, em linhas gerais, podemos dizer que determinar a complexidade computacional de um algoritmo é encontrar uma função matemática.

$f : N \rightarrow R$, tal que $k\ f(n)$, onde $k > 0 \in R$ e $n \in N$ é o tamanho da instância.

A **função f** é cota assintótica superior para o número de operações elementares necessárias para um **algoritmo *A*** resolver todas as instâncias de tamanho *n*.

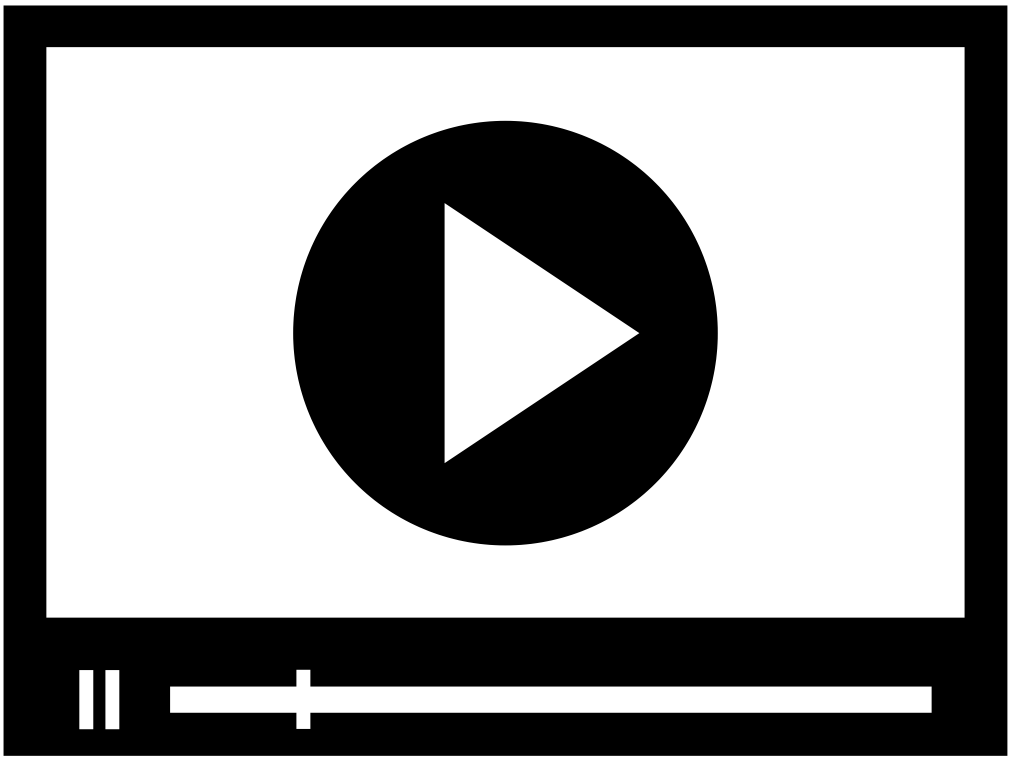
A **cota assintótica** descrita acima define a **notação *O***, isto é, diz-se que *g* é *O*(*f*) se existe um $n_0 \in N$ e um $k > 0 \in R$, tal que para todo $n > n_0$, $k * f(n) > g(n)$.

A introdução da **notação O** permite que a análise de complexidade computacional classifique os algoritmos em classes que determinam seu desempenho. Os algoritmos mais eficientes são aqueles que executam em um tempo proporcional a uma constante e, a partir daí, temos o aumento do tempo de execução segundo as ordens definidas na Tabela 1.

Ordem	Tempo de Execução
$O(1)$	
$O(log\ n)$	
$O(n)$	
$O(n\ log\ n)$	
$O(n^2)$	

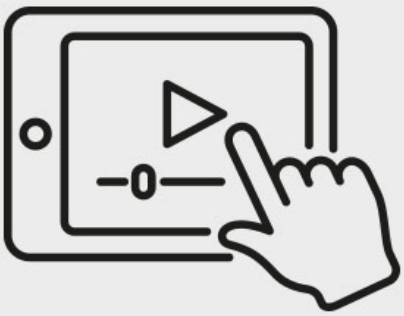
Atenção! Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

Tabela 1 – Complexidade computacional dos algoritmos. Fonte: O Autor.



ANALISANDO A COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



A frieza da Matemática não traduz com precisão a separação existente nesta classificação. Para exemplificar, vamos comparar uma busca linear em um vetor, que procura por todos os elementos do vetor, com a busca binária.

A ideia básica do algoritmo de busca binária é simples. Seja ***V*** um vetor ordenado. A busca binária compara a chave buscada com o elemento central do vetor (***n*/2**, onde ***n*** é o tamanho do vetor). Caso a chave seja igual ao elemento buscado, temos o sucesso, caso contrário, a

chave buscada pode ser maior ou menor. Conforme o caso, buscamos recursivamente na metade superior ou inferior do vetor.

Este algoritmo tem complexidade $O(\log n)$ e a busca linear $O(n)$.

★ EXEMPLO

Imaginemos agora que desejamos buscar uma chave em um vetor de 10^6 elementos. Com a busca linear, teríamos que realizar 10^6 comparações. Aplicando a busca binária, teremos $\log_2 10^6 \cong 20$ comparações. Isto é a mudança na classificação de ordem e implica numa mudança significativa na quantidade de operações elementares executadas.

Existe um resultado importante em relação à complexidade computacional dos algoritmos de ordenação, que são baseados na comparação entre dois elementos do vetor que desejamos ordenar. **Existe um limite inferior para complexidade destes algoritmos, que é $O(n \log n)$.**

Podemos visualizar este resultado modelando a ordenação como um problema de decisão. Assim, pode-se montar uma árvore de decisão que modele as comparações entre elementos deste vetor. Cada nó interno da árvore de decisão é a comparação entre dois elementos do vetor, e as folhas desta árvore as permutações obtidas pelo algoritmo. Como temos $n!$ permutações, temos $n!$ folhas nesta árvore de decisão. Sabemos também que a árvore de decisão é uma árvore binária (a comparação entre dois elementos x e y só pode fornecer dois resultados: $x < y$ ou $x > y$).

Sendo assim, os algoritmos mais eficientes de ordenação geram árvores de decisão de altura mínima, isto é, árvores completas. Ou seja, se determinarmos a altura da árvore de decisão mínima **(árvore completa),** determinamos a quantidade mínima de comparações para ordenar um vetor.

Como a árvore é completa com $n!$ folhas, sabe-se que esta árvore possui $2(n!)$ nós, porém $2(n!) < n^n$. Sabemos também que a altura da árvore completa é proporcional a $\log k$, onde k é o número de nós da árvore. Logo, a altura da árvore de decisão é menor que $\log (n^n) = n \log n$, o que mostra o resultado.

COMPLEXIDADE DE ESPAÇO

A complexidade de espaço mede a quantidade de memória necessária para que o algoritmo seja executado. O usual é que o algoritmo execute necessitando *O(n)* bytes, isto é, somente o espaço necessário para armazenar o vetor contendo as informações. Entretanto, é possível trocar espaço de memória por complexidade computacional.

Por exemplo, suponhamos que desejamos ordenar números inteiros contidos no intervalo **[0, 100000]**, armazenados em um vetor *V* de tamanho *n*. Podemos instanciar um vetor **AUX** de tamanho **100000**, inicializar este vetor com valor zero, por exemplo, e percorrer o vetor a ser ordenado da seguinte forma:

```
Para i = 1 até n
   aux [V[i]]=1;
```

Após esta operação, percorremos o vetor auxiliar, colocando em V os valores do índice que não possuem valor zero.

```
j=0;
para i = 0 ate 100000
  se (aux[i] == 1)
    inicio
      V[j]=i;
      j++;
    fim
```

Após o término do loop acima, o **vetor *V*** estará ordenado.

A análise da complexidade computacional nos remete a um algoritmo que executa em ***O*(*n*).** Entretanto, a análise não leva em conta que o algoritmo aloca memória proporcional ao tamanho do conjunto universo das chaves **(observe que o conjunto universo é o intervalo [0-100000]).**

Ou seja, a análise teórica da complexidade computacional do algoritmo nos indica um algoritmo de ordenação muito eficiente em termos de complexidade de tempo, porém, muito ineficiente em termos de complexidade de espaço, uma vez que necessita de uma memória proporcional ao tamanho do universo.

Observe que a análise de complexidade de tempo para este caso é tendenciosa. Isto é, despreza o fato de que a memória precisa ser inicializada e este passo consome recursos computacionais. Algoritmos cuja linearidade não é proporcional ao tamanho da instância, e sim

ao tamanho do conjunto universo são chamados de algoritmos pseudolineares e, normalmente, possuem complexidade computacional alta.

ORDENAÇÃO INTERNA X EXTERNA

Esta característica refere-se ao local onde os dados estão armazenados. Como sabemos, todo computador tem a memória principal ou memória **RAM** e a memória secundária, no caso, disco rígido ou memória de estado sólido.

São duas as principais diferenças entre estes tipos de memória:

A forma de acesso.

A velocidade de acesso.

A memória principal é acessada aleatoriamente, isto é, pode-se acessar byte a byte da memória independentemente. Já o acesso à memória secundária é feito por blocos, isto é, a menor porção que pode ser recuperada é um bloco, normalmente múltiplo de **512 Kbytes.**

Em relação à velocidade, a memória principal é muito mais rápida que a secundária. O tempo de acesso à memória principal é da ordem de nanosegundo $\mathbf{1x10^{-9}}$**,** enquanto a memória secundária é acessada em milissegundo $\mathbf{1x10^{-3}}$.

Os algoritmos de ordenação interna executam somente com todos os dados presentes na memória principal, enquanto os algoritmos de ordenação externa são capazes de ordenar dados contidos em memória secundária.

📢 ATENÇÃO

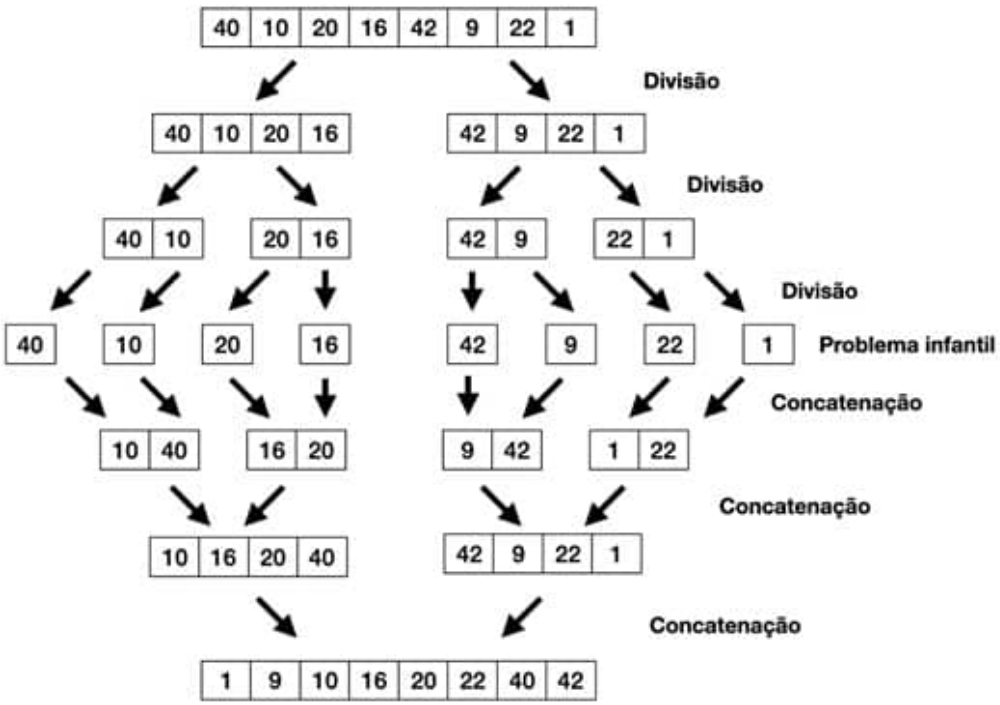
Vale destacar que os algoritmos de ordenação externa não são capazes de abstrair completamente a memória principal, isto é uma impossibilidade no paradigma de von Neumann. Para a execução de um programa, o código e os dados devem estar em memória principal. Assim sendo, um algoritmo de ordenação externa copia parte dos dados para a memória principal, trata estes dados e armazena o resultado (a sequência ordenada) em memória secundária.

CARÁTER RECURSIVO

Outra característica dos algoritmos de ordenação é o caráter recursivo. Alguns algoritmos são recursivos, normalmente aplicando a estratégia dividir para conquistar. Outros são sequenciais.

Um exemplo de algoritmo recursivo de ordenação é o Merge Sort. A ideia do algoritmo é dividir o vetor a ser ordenado em duas metades, ordenar estas metades e intercalar o resultado da ordenação obtendo o vetor ordenado.

A ordenação das metades do vetor é feita aplicando o algoritmo recursivamente. A Figura 2 mostra o exemplo do processo.



Fonte: O autor

Figura 2 – Merge Sort. Fonte: O Autor.

A **Figura 2** ilustra o processo do algoritmo recursivo. Na primeira linha do diagrama, temos o vetor original de oito elementos, que é dividido em duas metades de quatro elementos. Cada um destes vetores de quatro elementos é dividido em dois vetores de dois elementos (terceira linha do diagrama). Os vetores de dois elementos são divididos em vetores de um único elemento, os problemas infantis, isto é, que naturalmente já estão resolvidos.

Em seguida, inicia-se o passo da concatenação. No passo da concatenação, juntam-se, sempre dois a dois, vetores do nível anterior. Isto é, vetores de um elemento são aglutinados

em vetores de dois elementos, de dois elementos em quatro elementos e, de quatro elementos no vetor final.

O processo de concatenação de vetores é simples. Basta selecionar o menor elemento entre os dois vetores e colocar na primeira posição do novo vetor. Em seguida, pega-se o segundo menor elemento, colocando na segunda posição. Repete-se este processo até todos os elementos serem concatenados em um único vetor. **O resultado final é o vetor ordenado.**

Em particular, este algoritmo é baseado na comparação entre dois elemento do vetor, isto é feito no passo de concatenação e, por isso, o algoritmo não pode ter complexidade inferior a $O(n \log n)$. A complexidade deste algoritmo é, de fato, $O(n \log n)$. Para realizar a análise, não é necessário estudar o código do algoritmo. A **Figura 2** é um bom instrumento de análise.

Na **Figura 2**, cada linha representa a divisão do vetor em duas metades e de suas metades recursivamente (daí o caráter recursivo do algoritmo). Vejamos quantas linhas temos até a linha dos problemas infantis.

Linha 1 vetor original $n/2^0$

Linha 2 metade do vetor original $n/2^1$

Linha 3 metade da metade do vetor original $n/2^2$

.....

Linha k dos problemas infantis $n/2^{k-1}$

Porém, sabemos que na linha *k* os problemas são de tamanho = 1, assim $1 = n/2^{k-1}$, logo $n = 2^{k-1}$. Aplicando $\log_2$ temos $\log_2 n = \log_2 2^{k-1}$, que fornece $k-1 = \log_2 n$, $k = \log_2 n + 1$

Ou seja, temos $\log_2 n + 1$ linhas. Na Figura 1, $n = 8$, $\log_2 8 = 3$, $k = 4$ linhas até o problema infantil. O processo se repete na concatenação. Porém, na concatenação acessamos uma vez cada elemento do vetor, assim, em cada linha temos uma complexidade de n como temos $\log_2 n$ linhas para concatenar. A complexidade do algoritmo é $O(n \log n)$.

ESTABILIDADE

Diz-se que um algoritmo de ordenação é estável quando elementos que são apresentados já na ordem correta são mantidos durante a execução do algoritmo. Assim, se for apresentada

uma sequência já ordenada para um algoritmo estável, o algoritmo não irá realizar nenhuma operação de troca.

Um efeito da estabilidade é a possível redução do número de operações elementares necessárias para execução do algoritmo. Porém, o efeito da estabilidade é percebido nas instâncias com os melhores casos e não nos piores casos. Assim, a estabilidade do algoritmo não tem impacto na complexidade computacional teórica.

ALGORITMOS NÃO BASEADOS EM COMPARAÇÃO ENTRE ELEMENTOS DO VETOR

Os algoritmos de ordenação mais comuns se baseiam na comparação entre dois elementos da sequência a ser ordenada e alguma operação, normalmente a troca de posição, sobre os elementos comparados. Entretanto, existem algoritmos capazes de ordenar uma sequência sem comparar os elementos da sequência dois a dois.

Para estes algoritmos, o teorema que determina o limite inferior da ordenação como $O(n \log n)$ não se aplica, uma vez que sua premissa é invalidada, isto é, a árvore de decisão não é "montada" pelo algoritmo. Portanto, é teoricamente possível existirem algoritmos de ordenação desta classe que possuem complexidade inferior a $O(n \log n)$.

★ EXEMPLO

Um exemplo de algoritmo de ordenação não baseado em comparações entre elementos da sequência é o bucket sort ou método do balde. Este algoritmo aplica-se quando desejamos ordenar uma sequência de inteiros, na qual conhecemos a quantidade máxima de dígitos desses inteiros.

O princípio de funcionamento do algoritmo é simples. Executamos uma iteração para cada ordem numérica, da maior ordem para a menor ordem. Em cada iteração, separamos por dígito **(de 0 até 9)** pertencente à ordem analisada. Na próxima iteração, analisamos a ordem numérica inferior. Ao final, concatenamos a sequência obtendo a ordenação.

MÃO NA MASSA

Por exemplo, seja a sequência com números de três dígitos: 005, 235, 014, 236, 423, 456, 890.

ETAPA 01

ETAPA 02

ETAPA 03

ETAPA 01

Na primeira iteração, analisamos a ordem mais significativa, que é a centena, separando os números por centena.

Centena 0: 005, 014

Centena 1: -

Centena 2: 235, 236

Centena 3: -

Centena 4: 423, 456

Centena 5: -

Centena 6: -

Centena 7: -

Centena 8: 890

Centena 9: -

ETAPA 02

Para cada centena, separamos por dezena:

Centena 0:

Dezena 0: 005

Dezena 1: 014

Centena 2:

Dezena 3: 235, 236

Centena 4:

Dezena 2: 423

Dezena 5: 456

Centena 8:

Dezena 9: 890

ETAPA 03

Centena 0:

Dezena 0:

Unidade 5: 005

Dezena 1:

Unidade 4: 014

Centena 2:

Dezena 3:

Unidade 5: 235

Unidade 6: 236

Centena 4:

Dezena 2:

Unidade 3: 423

Dezena 5:

Unidade 6: 456

Centena 8:

Dezena 9:

Unidade 0: 890

Concatenando tudo na ordem (de cima para baixo): 005, 014, 235, 236, 423, 456, 890.

Alguns autores citam a complexidade deste algoritmo como ***O*(*n*).** A argumentação é que, como a quantidade de dígitos ***k*** é conhecida e constante, e para cada ordem numérica percorremos a sequência a ser ordenada uma vez, temos ***k* * n** que representa uma complexidade de ***O*(*n*).**

Entretanto, ***k*** é a quantidade máxima de dígitos do número e a função matemática que fornece a quantidade de dígitos de um número em **base 10** é ***log* (n).** Por esta razão, alguns autores citam este algoritmo com complexidade ***O*(*n log n*).**

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. ANALISE AS AFIRMATIVAS ABAIXO E MARQUE A OPÇÃO CORRETA.
1 – NÃO EXISTE ALGORITMO DE ORDENAÇÃO CAPAZ DE EXECUTAR EM UM TEMPO INFERIOR À COMPLEXIDADE DE O (N LOG N).
2 – MÉTODOS DE ORDENAÇÃO INTERNA EXECUTAM EM MEMÓRIA PRINCIPAL (RAM) SOMENTE, ENQUANTO MÉTODOS DE ORDENAÇÃO EXTERNA EXECUTAM EM MEMÓRIA SECUNDÁRIA, PORÉM PODEM USAR MEMÓRIA PRINCIPAL TAMBÉM.
3 – SOMENTE ALGORITMOS DE ORDENAÇÃO NÃO BASEADOS EM COMPARAÇÃO PODEM EXECUTAR EM UM TEMPO INFERIOR À O(*N LOG N*).

A) Somente a afirmativa 1 está correta.

B) Somente a afirmativa 2 está correta.

C) Somente a afirmativa 3 está correta.

D) As afirmativas 2 e 3 estão corretas.

E) As afirmativas 1, 2 e 3 estão corretas.

2. MARQUE A ALTERNATIVA CORRETA EM RELAÇÃO À ESTABILIDADE DE UM ALGORITMO DE ORDENAÇÃO.

A) Um algoritmo instável possui necessariamente complexidade computacional alta.

B) Um algoritmo instável tem complexidade de espaço superior à *O(n)*.

C) Um algoritmo estável pode necessitar de menos operações que um algoritmo instável, entretanto, isto não reduz a complexidade computacional do algoritmo.

D) Algoritmos estáveis sempre executam em uma complexidade de *O(n log n)*.

E) Algoritmos internos sempre são estáveis.

GABARITO

1. Analise as afirmativas abaixo e marque a opção correta.
1 – Não existe algoritmo de ordenação capaz de executar em um tempo inferior à complexidade de O (n log n).
2 – Métodos de ordenação interna executam em memória principal (RAM) somente, enquanto métodos de ordenação externa executam em memória secundária, porém podem usar memória principal também.
3 – Somente algoritmos de ordenação não baseados em comparação podem executar em um tempo inferior à O(*n log n*).

A alternativa **"D "** está correta.

Letra D, a afirmativa 1 está incorreta, algoritmos não baseados em comparação entre elementos da sequência a ser ordenada não estão sujeitos ao limite de complexidade de O(*n log n*).

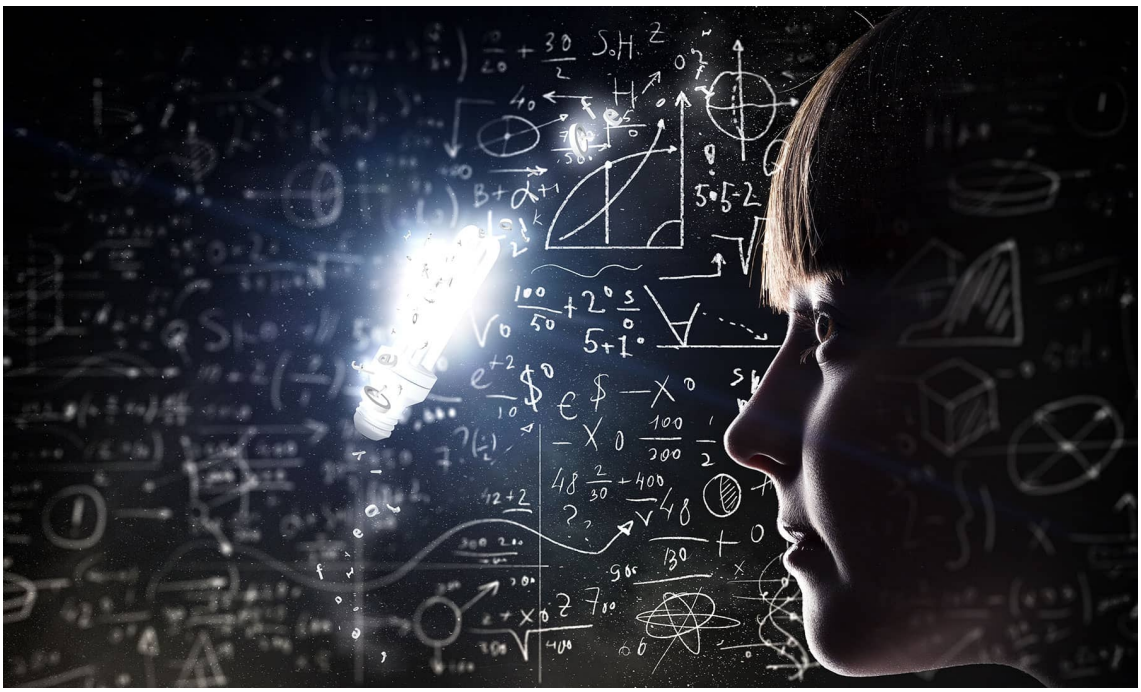
2. Marque a alternativa correta em relação à estabilidade de um algoritmo de ordenação.

A alternativa **"C "** está correta.

A estabilidade pode reduzir o número de operações em algumas instâncias, porém não reduz a complexidade computacional do algoritmo.

MÓDULO 2

⦿ **Distinguir os algoritmos de ordenação da bolha, inserção e seleção para desenvolvimento de solução rápida e eficiente para implementação em Linguagem C**



MÉTODO DA BOLHA (BUBBLE SORT)

Seja $S = s_1, s_2, ..., s_n$ uma sequência de números inteiros distintos. Uma forma de verificar se a sequência S está ordenada é realizar o seguinte conjunto de operações: Para $1 \leq i < n$ verificar se $s_i < s_{i+1}$, caso isto ocorra, para todos os valores de i, a sequência está ordenada.

★ EXEMPLO

Por exemplo, para a **sequência** $S = s_1 = 10, s_2 = 12, s_3 = 15, s_4 = 20, s_5 = 25$, temos que $s_1 < s_2, s_2 < s_3, s_4 < s_5$. Por esta razão, podemos afirmar que a sequência está ordenada.

A ideia do método da bolha é explorar esta propriedade com o objetivo de ordenar o vetor.

★ EXEMPLO

No exemplo acima, $S = s_1 = 10$, $s_2 = 12$, $s_3 = 15$, $s_4 = 20$, $s_5 = 25$, realizamos uma iteração, ou seja, todas as comparações, e verificamos que a propriedade é válida para todo par de elementos adjacentes. Isto garante a ordenação da sequência. De fato, se $s_i < s_{i+1}$ e $s_{i+1} < s_{i+2}$ então $s_i < s_{i+2}$, ou seja, a comparação é transitiva e assim se garante que a relação é válida para qualquer par da sequência $s_i < s_j$, se $i < j$.

O método da bolha explora esta propriedade realizando a troca de posição caso a comparação entre elementos adjacentes falhe.

MÃO NA MASSA

Vejamos um exemplo, seja a sequência $S = 15, 20, 8, 16, 40$. No ábaco abaixo, vamos destacar o par que está sendo comparado a cada passo. Caso a comparação seja bem-sucedida, isto é, $s_i < s_{i+1}$, nada é realizado, caso contrário, efetuamos a troca.

Na iteração completa que não ocorra troca, teremos a sequência ordenada.

ETAPA 01

ETAPA 02

ETAPA 03

ETAPA 01

Início da 1ª iteração

Passo 1: 15 < 20, 8, 16, 40

Passo 2, 15, 20 > 8, 16, 40

Passo 3: 15, 8, 20 > 16, 40

Passo 4: 15, 8, 16, 20 < 40

Fim da 1ª iteração

ETAPA 02

Início da 2ª iteração

Passo 1: 15 > 8, 16, 20, 40

Passo 2: 8, 15 < 16, 20, 40

Passo 3: 8, 15, 16 < 20, 40

Passo 4: 8, 15, 16, 20 < 40

Fim da 2ª iteração

ETAPA 03

Início da 3ª iteração

Passo 1: 8 < 15, 16, 20, 40

Passo 2: 8, 15 < 16, 20, 40

Passo 3: 8, 15, 16 < 20, 40

Passo 4: 8, 15, 16, 20 < 40

Fim da 3ª iteração – Como não houve troca, a sequência está ordenada.

Entendido o princípio de funcionamento do algoritmo, vejamos a complexidade computacional para obter a sequência ordenada.

O primeiro passo para o estudo da complexidade computacional do algoritmo é a determinação do pior caso. Se analisarmos o ábaco acima, poderemos verificar que cada iteração tem quatro passos, isto é, **n-1** comparações, e que o algoritmo para as **n-1** comparações têm sucesso.

Outra característica interessante é que, em uma iteração, o valor que é trocado vai para a posição dele no vetor ordenado. Isto é, na primeira iteração, o maior valor vai para última posição, na segunda iteração, o segundo maior valor vai para penúltima posição, e assim,

sucessivamente. Deste modo, o pior caso para o método da bolha é quando apresentamos a sequência ordenada em ordem reversa na entrada do algoritmo.

Para fins de análise, seja a sequência $\boldsymbol{S = s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_n}$. Se ela for apresentada em ordem reversa para o algoritmo da bolha, teremos na entrada $\boldsymbol{S' = s_n, ..., s_3, s_2, s_1}$. Assim, a cada iteração teremos os seguintes resultados parciais:

1ª iteração: $s_{n-1}, s_{n-2}, ..., s_3, s_2, s_1, s_n$ – após n-1 comparações e trocas

2ª iteração: $s_{n-2}, ..., s_3, s_2, s_1, s_{n-1}, s_n$ – após n-1 comparações e trocas

.

*n-2*ª iteração: $s_2, s_1, s_3, ..., s_{n-2}, s_{n-1}, s_n$ – após n-1 comparações e trocas

*n-1*ª iteração: $s_1, s_2, s_3, ..., s_{n-2}, s_{n-1}, s_n$ – após n-1 comparações e nenhuma troca

A operação elementar do algoritmo é a comparação, não a troca, e a comparação sempre ocorre. Assim, para ordenar o vetor, o algoritmo executa $\mathbf{(n-1)^2}$ comparações, isto é, o algoritmo executa em $\boldsymbol{O(n^2)}$**.** Ainda em relação à complexidade, o método da bolha só executa $\boldsymbol{O(n^2)}$ operações no pior caso.

COMENTÁRIO

Lembre-se, o estudo de complexidade do algoritmo é feito sempre no pior caso, entretanto, a quantidade de comparações pode variar, chegando, no melhor caso (que é o fornecimento do vetor já ordenado em ordem crescente), a n-1 comparações.

Vejamos as outras características do algoritmo: É estável, ou seja, caso um elemento esteja posicionado corretamente em relação ao seu sucessor e antecessor na sequência, o algoritmo não efetua troca. É não recursivo. Tem baixa complexidade de espaço O(n), isto é, só utiliza a memória necessária para armazenar a sequência a ser ordenada e é um método de ordenação interna.

O código em C do algoritmo é fornecido abaixo:

```
void bolha (int *v)
{
```

```
    int troca=1;
    int i=0;
    int aux;
    while (troca)
    {
        troca = 0;
        while (i < TAMANHO - 1)
        {
            if (v[i] > v[i+1])
            {
                aux = v[i];
                v[i] = v[i+1];
                v[i+1] = aux;
                troca = 1;
            }
            i++;
        }
        i = 0;
    }
}
```

Programa 1 – Método da Bolha em C.

MÉTODO DA SELEÇÃO (SELECTION SORT)

O método da ordenação por seleção é um algoritmo simples.

O algoritmo é iterativo e parte do princípio que a sequência não está ordenada e que todos os elementos da sequência estão fora de sua posição.

Na primeira iteração, o algoritmo analisa a sequência $S = s_1, s_2, ..., s_n$ e determina o menor elemento desta sequência. Seja $s_k = s'_1$ este elemento. Em seguida, o algoritmo troca s'_1 com s_1. Obtendo a sequência $S = s'_1, s_2, ..., s_1, ..., s_n$.

Na segunda iteração, como s'_1 é o menor elemento, s'_1 está na posição correta. Ou seja, s'_1 é o primeiro elemento da sequência ordenada. Nesta iteração, o algoritmo irá determinar o menor elemento entre $s_2, ..., s_1, ..., s_n$, que será o segundo menor elemento da sequência ordenada. Seja s_j o menor elemento entre $s_2, ..., s_1, ..., s_n$, seja $s'_2 = s_j$. Trocando $s_j = s'_2$ com s_2, temos a sequência $s'_1, s'_2, s_3 ..., s_1, ..., s_2, ..., s_n$. Ao término da segunda iteração, s'_1, s'_2 correspondem aos dois primeiros termos da sequência ordenada.

Repetimos cada iteração ***n*-1** vezes, assim teremos a sequência ordenada completando a execução do algoritmo. Utilizando a sequência **13, 25, 8, 19, 7, 52** como exemplo, vamos executar o algoritmo.

1ª iteração: 13, 25, 8, 19, **7**, 52; 7 é o menor elemento

2ª iteração: **7**, 25, **8**, 19, 13, 52; 8 é o menor elemento

3ª iteração: **7, 8**, 25, 19, **13**, 52; 13 é o menor elemento

4ª iteração: **7, 8, 13, 19**, 25, 52; 19 é o menor elemento

5ª iteração: **7, 8, 13, 19, 25**, 52; 25 é o menor elemento

6ª iteração: **7, 8, 13, 19, 25, 52**; 52 é o menor elemento

Fim de execução

A complexidade computacional do algoritmo é $O(n^2)$. Este fato pode ser provado analisando o número de iteração e a quantidade de operações por iteração. O primeiro passo para a análise é determinar a operação fundamental do algoritmo. A cada iteração, necessitamos o valor mínimo de uma sequência de ***n*** elementos. A operação básica para isto é a comparação.

Na primeira iteração, temos que determinar o menor elemento de uma sequência de *n* elementos. Para isto, é necessário realizar *n* comparações. Na segunda iteração, temos que determinar o menor elemento de uma sequência de ***n*-1** elementos, e assim por diante. Assim, temos:

1ª iteração: *n*-1 comparações

2ª iteração: *n*-2 comparações

...

n-1ª iteração: 1 comparação

Logo, o número de operações elementares é: **n-1 + n-2 + ... + 1 = (n)(n-1)/2** que é $O(n^2)$**.** Um aspecto relevante na análise de complexidade do método da seleção é que não existe um tipo de instância de pior caso, para todas as instâncias o algoritmo executa de mesma forma em $O(n^2)$**.**

Em relação às demais características do algoritmo: É estável, porém, dependendo de como for implementado, esta característica pode ser perdida, entretanto não há impacto na complexidade, não recursivo, tem complexidade de espaço de $O(n)$**.**

O código em C é fornecido abaixo. Programa 2.

```
void selecao (int *v)
{
   int i,j,aux;
   for (i=0; i < TAMANHO-1; i++)
   {
      for (j=i+1; j < TAMANHO; j++)
      {
         if (v[i] > v[j])
         {
            aux = v[i];
            v[i] = v[j];
            v[j] = aux;
         }
      }
   }
}
```

Programa 2 – Método da seleção em C.

O código acima apresenta a versão menos estável do algoritmo. Observe que trocamos o valor armazenado na posição *i* do vetor com o menor valor da sequência ***i*+1** até o **tamanho** do

vetor. Uma forma de fazer isto é trocar todo elemento ***v*[*j*] < *v*[i],** está conceitualmente correto, porém reduz a estabilidade do algoritmo.

Podemos melhorar a estabilidade do algoritmo realizando a execução em dois passos: No primeiro, elege-se o elemento mínimo e, no segundo passo, realiza-se a troca com o elemento na **posição *i*.** O Programa 3 está implementado desta forma.

```
void selecao (int *v)
{
    int i,j,aux, minimo, pos_minimo;
    for (i=0; i < TAMANHO-1; i++)
    {
        minimo = v[i];
        pos_minimo = i;
        for (j=i+1; j < TAMANHO; j++) // Passo 1
        {
            if (minimo > v[j])
            {
                minimo = v[j];
                pos_minimo = j;
            }
        }
        if (pos_minimo != i)  // Passo 2
        {
            aux = v[pos_minimo];
            v[pos_minimo] = v[i];
            v[i] = aux;
        }
    }
}
```

Programa 3 – Método da seleção, implementação estável.

MÉTODO DA INSERÇÃO (INSERTION SORT)

O método de ordenação da inserção é um algoritmo simples e eficiente para listas **“quase”** ordenadas.

O princípio de funcionamento do algoritmo é dividir a lista em duas partes:

Os elementos já ordenados.

Os elementos a ordenar.

Inicialmente, a parte da lista que contém os elementos já ordenados é o primeiro elemento (uma lista unitária é sempre uma lista ordenada). Em seguida, devemos inserir o primeiro elemento da lista não ordenada (segundo elemento da lista na primeira iteração) na posição correta do segmento já ordenado da sequência. O processo é repetido até que não tenhamos mais elementos na lista não ordenada.

Vamos analisar a execução do algoritmo através de um exemplo. Seja a sequência: 16, 8, 20, 18, 9, 2.

Início: **16**, 8, 20, 18, 9, 2

1ª iteração: **8, 16**, 20, 18, 9, 2

2ª iteração: **8, 16, 20**, 18, 9, 2

3ª iteração: **8, 16, 18, 20**, 9, 2

4ª iteração: **8, 9, 16, 18, 20**, 2

5ª iteração: **2, 8, 9, 16, 18, 20**

Antes da primeira iteração, consideramos que o primeiro elemento “16” é a sequência ordenada e os elementos “8, 20, 18, 9, 2” os não ordenados.

ETAPA 01

ETAPA 02

ETAPA 03

ETAPA 04

ETAPA 01

Na primeira iteração, analisamos o primeiro elemento da sequência não ordenada colocando-o na sua posição correta. Assim, passamos a ter “8, 16”, que é a sequência ordenada, e “20, 18, 9, 2”, que é a sequência não ordenada.

ETAPA 02

Na segunda iteração, vamos colocar o elemento “20” na posição correta que, por coincidência, já está posicionado. Sendo assim, passamos a ter “8, 16, 20” como sequência ordenada e “18, 9, 2” como não ordenada.

ETAPA 03

Na terceira iteração, analisamos a chave “18”, colocando-a na sua posição correta na sequência ordenada “8, 16, 18, 20”. Restando “9, 2” como não ordenada.

ETAPA 04

Na quarta iteração, analisamos “9”, obtendo “8, 9, 16, 18, 20” e “2”.

Na última iteração, a chave “2” é colocada em sua posição, terminando a execução.

A complexidade deste algoritmo também é $\boldsymbol{O(n^2)}$**.** Assim como o método da bolha, o algoritmo tem o pior caso bem formado, a saber, as instâncias ordenadas em ordem reversa da desejada. Seja a sequência $\boldsymbol{S = s_1, s_2, s_3, ..., s_n}$ **onde** $\boldsymbol{s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_n}$. Supondo que inicialmente apresentamos ao algoritmo a sequência ordenada em ordem reversa, isto é, $\boldsymbol{S' = s_n, s_{n-1}, ..., s_3, s_2, s_1}$, teremos a seguinte execução:

Início: $\boldsymbol{s_n}$, s_{n-1}, s_{n-2} ..., s_3, s_2, s_1

1ª iteração: $\boldsymbol{s_{n-1}}$, $\boldsymbol{s_n}$, s_{n-2} ..., s_3, s_2, s_1 – 1 troca

2ª iteração: $\boldsymbol{s_{n-2}}$, $\boldsymbol{s_{n-1}}$, $\boldsymbol{s_n}$, ..., s_3, s_2, s_1 – 2 trocas

...

n-3ª iteração: $\boldsymbol{s_3}$, **...**, $\boldsymbol{s_{n-2}}$, $\boldsymbol{s_{n-1}}$, $\boldsymbol{s_n}$, s_2, s_1 – n-3 trocas

n-2ª iteração: $\boldsymbol{s_2}$, $\boldsymbol{s_3}$, **...**, $\boldsymbol{s_{n-2}}$, $\boldsymbol{s_{n-1}}$, $\boldsymbol{s_n}$, s_1 – n-2 trocas

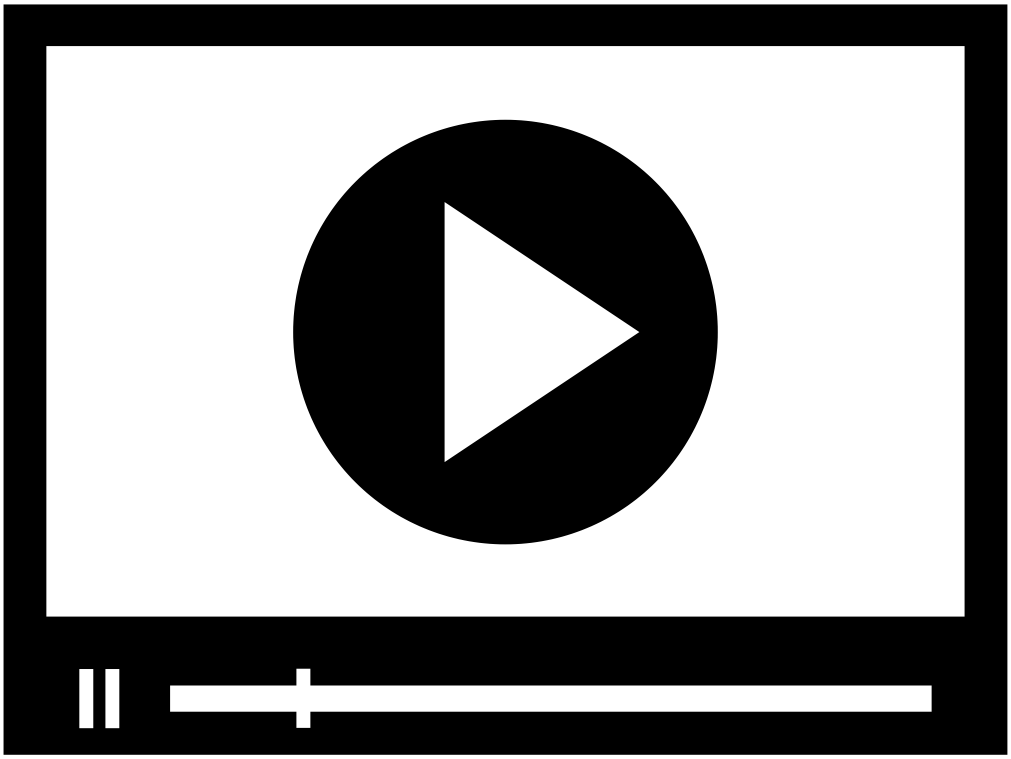
n-1ª iteração: $\boldsymbol{s_1}$, $\boldsymbol{s_2}$, $\boldsymbol{s_3}$, **...**, $\boldsymbol{s_{n-2}}$, $\boldsymbol{s_{n-1}}$, $\boldsymbol{s_n}$ – n-1 trocas

Somando-se a quantidade de comparações e trocas: $\mathbf{1 + 2 + 3 + ... + \mathit{n}\text{-}1 = n\,(n\text{-}1)/2}$ que é $\boldsymbol{O(n^2)}$**.**

Assim como os outros, o algoritmo é estável, não recursivo e com complexidade de espaço de $O(n)$. O programa em Linguagem C que implementa o algoritmo é apresentado no Programa 4.

```
void insertion (int *v)
{
   int i, j, aux;
   for (i=0; i< TAMANHO-1; i++)
   {
      j=i+1;
      while (v[j-1]>v[j] && j > 0)
      {
         aux = v[j-1];
         v[j-1]=v[j];
         v[j]=aux;
         j--;
      }
   }
}
```

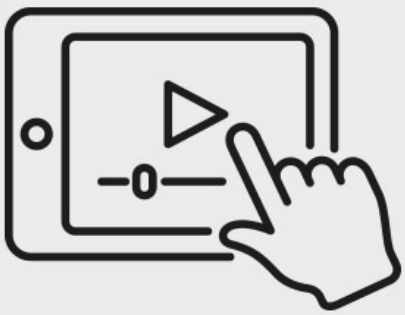
Programa 4 – Insertion Sort.



APLICANDO OS ALGORITMOS DE ORDENAÇÃO.

Para acompanhar o vídeo, você pode baixar o código fonte do programa que será utilizado no vídeo clicando aqui.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. QUANDO APRESENTAMOS UMA SEQUÊNCIA JÁ ORDENADA PARA OS ALGORITMOS DA BOLHA E PARA O INSERT SORT, É CORRETO AFIRMAR QUE:

A) O método da bolha irá executar mais rápido, uma vez que, para sequências ordenadas, o método da bolha executa n-1 comparações, enquanto o Insert Sort executa n (n-1)/2 comparações.

B) O Insert Sort irá executar mais rápido, uma vez que, para sequências ordenadas, o método executa n-1 comparações, enquanto o método da bolha sempre executa n (n-1)/2 comparações.

C) Ambos executam sempre em $O(n^2)$ operações.

D) Ambos executam sempre em tempo linear para as instâncias já ordenadas.

E) A sequência ordenada não é o melhor caso dos métodos analisados.

2. COMPARANDO O SELECTION SORT COM O BUBBLE SORT E O INSERT SORT, É CORRETO AFIRMAR QUE:

A) Os três têm a mesma complexidade computacional.

B) Podemos afirmar que o Bubble Sort e o Insert Sort são mais eficientes que o Selection Sort.

C) Podemos afirmar que o Selection Sort e o Insert Sort são mais eficientes que o Bubble Sort.

D) Podemos afirmar que o Selection Sort e Bubble Sort são mais eficientes que o Insert Sort.

E) O Bubble Sort é o mais eficiente entre os três.

GABARITO

1. Quando apresentamos uma sequência já ordenada para os algoritmos da bolha e para o Insert Sort, é correto afirmar que:

A alternativa **"D "** está correta.

Gabarito comentado: Letra D, o método da bolha e o Insert Sort executam em tempo linear para o melhor caso. Em ambos algoritmos, o melhor caso é a sequência ordenada.

2. Comparando o Selection Sort com o Bubble Sort e o Insert Sort, é correto afirmar que:

A alternativa **"A "** está correta.

Não há base, além da complexidade computacional, para afirmar que um algoritmo é melhor que outro. Como os três têm a mesma complexidade, são considerados equivalentes.

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste tema, viajamos pelo mundo dos algoritmos de ordenação elementares. Inicialmente, estudamos o problema da ordenação, como analisar e classificar os algoritmos de ordenação e como as diversas métricas de classificação devem ser aplicadas para a escolha do algoritmo de ordenação.

Finalmente, estudamos os métodos de ordenação elementares empregando os algoritmos de ordenação da bolha, ordenação por seleção e por inserção, assim como a implementação desses algoritmos em Linguagem C.

Para ouvir um *podcast* sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

REFERÊNCIAS

FRIEND, E. **Sorting on electronic computer systems**. J. ACM 3 (1956), 134–168.

EXPLORE+

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, leia:

A Survey, Discussion and Comparison of Sorting Algorithms, Ashok Kumar Karunanithi, Repositório de documentos do Departamento de Ciência Computacional da Umea University .

CONTEUDISTA

Luiz Henrique da Costa Araujo

CURRÍCULO LATTES